Le paradoxe de Banach-Tarski

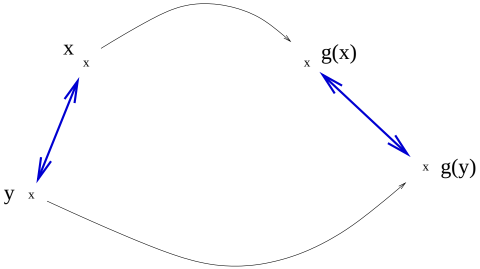
Georges COMTE
(Savoie Mont Blanc - UMR CNRS 5127)

25th November 2021

Quelques définitions

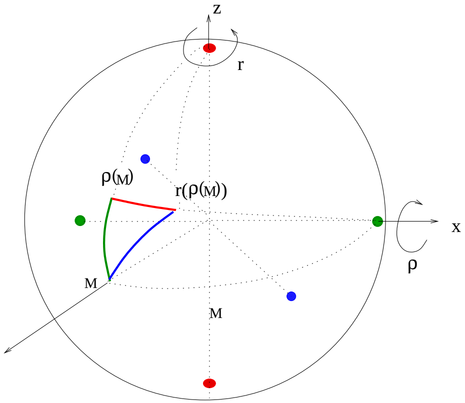
- Une **isométrie** de $\mathbb{R}^3$ est une application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \quad \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|.$$



- Les seules isométries de l'espace qui correspondent aux déplacement des objets rigides : une translation composée avec une rotation autour d'un axe contenant O.

- En particulier la composition de rotations (autour d'axes contenant O) est encore une rotation (autour d'un axe contenant O).

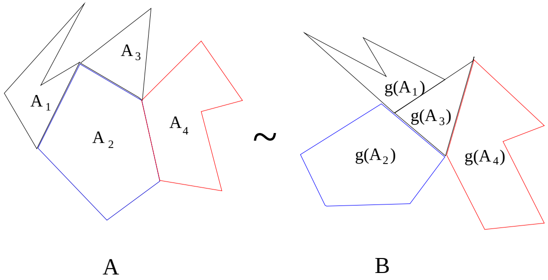


Quelques définitions

- Deux sous ensembles A et B de $\mathbb{R}^3$ sont **équidécomposables**, et on note

$$\boxed{A \sim B}$$

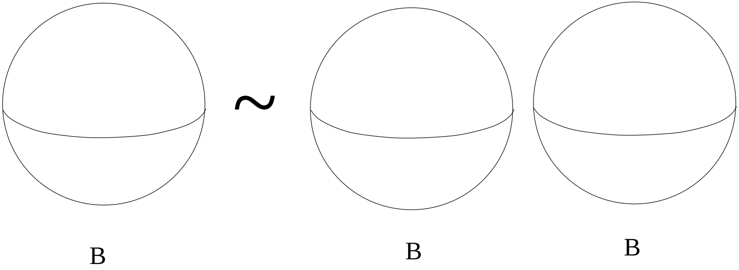
si et seulement s'il existe une partition de A en un nombre finie de sous ensembles $A_1, \ldots, A_n$ (pour un certain entier n), et des isométries de $\mathbb{R}^3$, $g_1, \ldots, g_n$, telles que $g_1(A_1), \ldots, g_n(A_n)$ forment une partition de B.



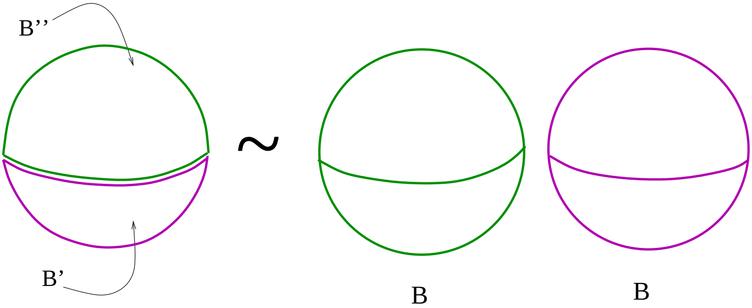
- **Transitivité.** $A \sim B$ et $B \sim C \implies A \sim C$.

Trois paradoxes équivalents

Théorème 1. [Banach-Tarski (1924)] Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^3$, alors $B \sim B \sqcup B$.

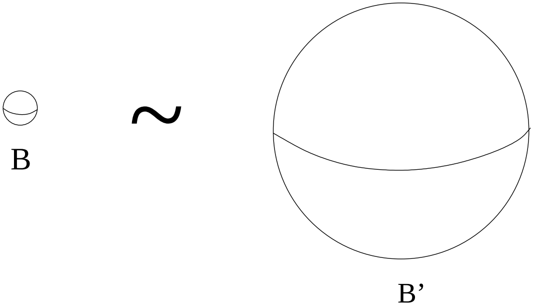


Théorème 2. Il existe deux sous-ensembles disjoints B' et B'' de B, tels que $B' \sim B$ et $B'' \sim B$.

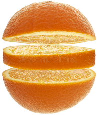


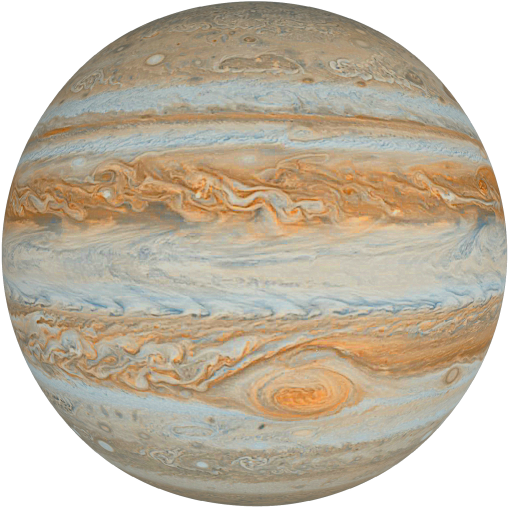
On dit dans ce cas que la boule B est **paradoxale**, et c'est sous cette forme que nous démontrons le Théorème 1.

Théorème 3. Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^3$, B' une autre boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon quelconque, alors $B \sim B'$.



Trois paradoxes équivalents





Mais qu'allons-nous donc faire ???

Des énoncés moins paradoxaux

Exemple 1.

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}_- \sqcup]1, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]0, 1]$$

En utilisant l'additivité des longueurs :

$$\text{“}\infty = \infty - 1\text{"}$$

ce qui semble moins paradoxal.

Exemple 2. Soit C le cercle unité de $\mathbb{R}^2$:

$$C \sim C \setminus \{a\}$$

On a donc écrit quelque chose comme :

$$\text{“}2\pi = 2\pi - 0\text{"}$$

ce qui semble moins paradoxal.

On reste donc perplexe et on attend la preuve avec impatience

Preuve du théorème

On va montrer que la boule unité est paradoxale.

- $$\boxed{S \text{ paradoxale} \Longrightarrow B \text{ est paradoxale.}}$$

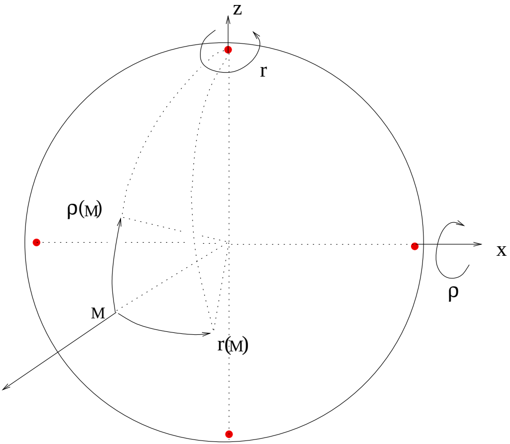
Preuve. Si $S', S'' \subset S$ et $S' \sim S$, $S'' \sim S$, alors en prenant les rayons (privés de l'origine de $\mathbb{R}^3$), on obtient deux parties disjointes B' et B" dans $B \setminus \{0\}$ telles que

$$B' \sim B \setminus 0 \ \text{ et } \ B'' \sim B \setminus 0.$$

Mais $B \setminus 0 \sim B$ (on prend un cercle dans B, cf Exemple 2).

Preuve du Théorème

- ρ la rotation d'angle $\arccos(1/3)$ d'axe Ox,
- r la rotation d'angle $\arccos(1/3)$ d'axe Oz.



Preuve du Théorème

- G l'ensemble des rotations qui s'écrivent comme un nombre fini de compositions de ρ, r, ρ^{-1} et r^{-1}.

L'ensemble G est dénombrable.

Une rotation de G envoie S dans S, et possède exactement deux points fixes dans S diamétralement opposés (si elle n'est pas la rotation Id_S...).

La propriété fondamentale de G : deux écritures réduites distinctes représentent des rotations distinctes.

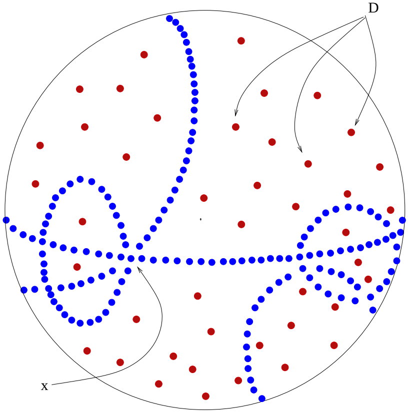
$$r^2\rho^{-1}r^{-4}\rho^3 \neq r\rho r^{-1} \neq Id$$

Preuve du Théorème

- D l'ensemble des points fixes de toutes les rotations de $G \setminus \{Id\}$ (dénombrable comme G).
- **L'orbite de x sous l'action de G :** Si $x \in S \setminus D$, on note

$$G \cdot x = \{g(x), g \in G\}.$$

(dénombrable, comme G)



Preuve du Théorème

$$\boxed{\text{Les ensembles } G \cdot x, \text{ pour } x \in S \setminus D, \text{ partitionnent } S \setminus D}$$

- **$\mathbf{G \cdot x \subset S \setminus D}$:**

  Si $g \in G, x \in S \setminus D$ et $g(x) = d \in D$, soit $\phi \in G \setminus \{Id\}$ dont l'axe passe par d.
  On a $\phi(g(x)) = \phi(d) = d = g(x) \Longrightarrow g^{-1} \circ \phi \circ g(x) = x$.

  Mais $x \notin D \Longrightarrow g^{-1} \circ \phi \circ g = Id \Longrightarrow \phi = g \circ Id \circ g^{-1} = Id$.

  Contradiction.

- **$\mathbf{Id \in G \Longrightarrow x \in G \cdot x}$**

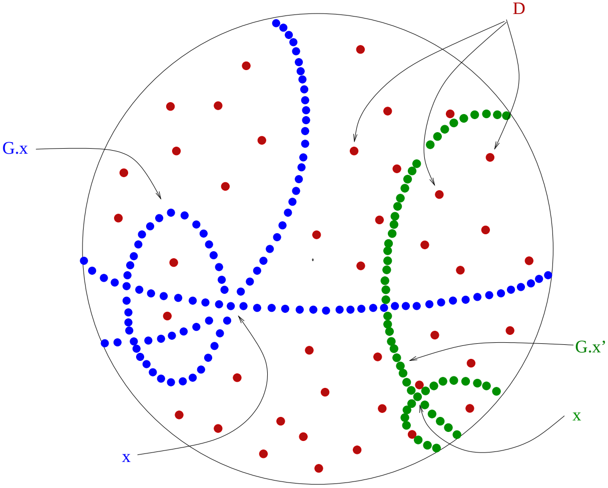
- **Les orbites sont deux à deux disjointes :**

  Soient $x, x' \in S \setminus D$ tels que $G \cdot x \cap G \cdot x' \neq \emptyset$.

  Il existe $g, g' \in G$ tels que $g(x) = g'(x')$.

  Or $x' = g'^{-1}(g(x)) \Longrightarrow G \cdot x' \subset G \cdot x$.

  Par symétrie $G \cdot x' = G \cdot x$.



- $\mathscr{O} \subset \mathbf{S} \setminus \mathbf{D}$ tel que chaque orbite d'un point de $S \setminus D$ sous G possède exactement un point dans $\mathscr{O}$.

Preuve du Théorème

- $\mathbf{G}_\rho$: l'ensemble des rotations de G dont l'écriture commence par ρ.
- De même $\mathbf{G}_{\rho^{-1}}, \mathbf{G}_{\mathbf{r}}, \mathbf{G}_{\mathbf{r}^{-1}}$.

- $\mathscr{O}_\rho = \{\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{g} \in \mathbf{G}_\rho, \mathbf{x} \in \mathscr{O}\}$.
- De même $\mathscr{O}_{\rho^{-1}}, \mathscr{O}_{\mathbf{r}}, \mathscr{O}_{\mathbf{r}^{-1}}$.

- $\mathscr{O}_\rho, \mathscr{O}_{\rho^{-1}}, \mathscr{O}_r$ et $\mathscr{O}_{r^{-1}}$ sont **deux à deux disjoints** :

  Si $g(x) = h(y)$, avec $x, y \in \mathscr{O}$, $g \in G_\rho, h \in G_r$:
  $h^{-1} \circ g(x) = y \Longrightarrow G \cdot x = G \cdot y \Longrightarrow x = y$.
  $h^{-1} \circ g(x) = x \Longrightarrow h^{-1} \circ g = Id$, puisque $x \notin D$.
  Ce qui en retour impose $h = g$.
  Or h et g ont une écriture distincte : contradiction.

- $\mathbf{R}' = \mathscr{O}_\rho \sqcup \mathscr{O}_{\rho^{-1}}$ et $\mathbf{R}'' = \mathscr{O}_{\mathbf{r}} \sqcup \mathscr{O}_{\mathbf{r}^{-1}}$.

- $R' \cap R'' = \emptyset$,
- $\rho^{-1}\mathscr{O}_\rho = \{\alpha \circ \cdots \circ \beta(x), x \in \mathscr{O}, \alpha \in \{\rho, r, r^{-1}\}\}$.
- En conclusion, $\rho^{-1}\mathscr{O}_\rho \sqcup \mathscr{O}_{\rho^{-1}} = S \setminus D$, d'où $R' \sim S \setminus D$.
- De même $R'' \sim S \setminus D$: $S \setminus D$ **est paradoxal**.

Preuve du Théorème

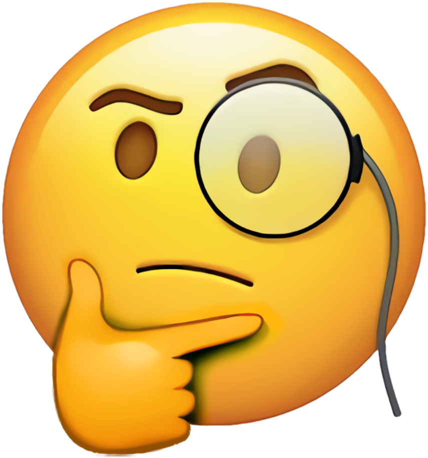
- On montre que $S \setminus D \sim S$, comme on a montré que $C \setminus \{a\} \sim C$.

- En conclusion

$$\boxed{R' \sim S \setminus D \sim S \quad \text{et} \quad R'' \sim S \setminus D \sim S}$$

Donc S **est paradoxale**. $\square$

Mais que diable avons-nous donc fait ?



Conséquences

- Il n'existe pas d'application $Vol : \mathscr{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ finiment (et donc dénombrablement) additive et invariante par les isométries, telle que $Vol(B) \neq 0$.
- Plus généralement, ceci montre que l'on ne peut pas construire une théorie de la mesure universelle sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.
- L'ensemble $\mathscr{O}$ est ainsi non-mesurable.
- On peut construire une théorie universelle de la longueur et de l'aire (finiment additives) dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.
  Mais pas de théorie universelle de la mesure dénombrablement additive dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$!

Mais comment l'ensemble $\mathscr{O}$ est-il construit ?

- "*On choisit un représentant de chaque orbite...*"